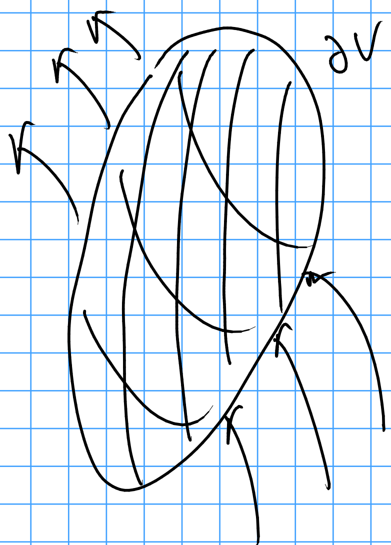
EM Tutorium - Blatt 10, 5.7.2010

Wiederholung: Ladungserhaltung



$$\iint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{a} = -\frac{dQ(V)}{dt}$$

Ladungserhaltung in integraler Form

stationärer Fall: $\frac{dQ(V)}{dt} = 0$

$$\iint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{a} = 0$$

Satz v. Gauß:

$$\iint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{a} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j}\, dV = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

"äquivalente Aussagen"

allgemeine Darstellung:

$$\iint_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{a} = -\frac{dQ(V)}{dt}$$

$$Q(V) = \iiint_V \rho(\vec{r})\, dV \qquad \frac{d}{dt} Q(V) = \frac{d}{dt} \iiint_V \rho(\vec{r})\, dV =$$

$$= \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r})\, dV$$

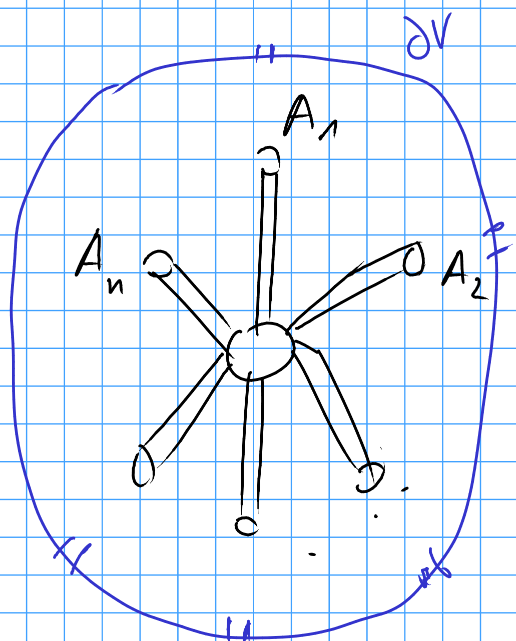
$$\Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV = - \iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) \, dV$$

$$\Rightarrow \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) = 0}$$

Ladungserhaltung in differentieller

→ Herleitung <u>KCL</u> auf feldtheoretische Weise



$$\sum_k I_k = 0$$

$$0 = \operatorname{div} \vec{j} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV = \iint_{\partial V} \vec{j} \, d\vec{a}$$

$$= \sum_k \iint_{A_k} \vec{j} \, d\vec{a} = \underline{\underline{\sum_k I_k}}$$

<u>Magnetostatik</u>

$$\vec{F}_L = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \, d\vec{a}$$

$$U_{ind} = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Zusatzaufgabe (DVP 1997)

geg: $\sigma(T) = \sigma_0 \dfrac{T - T_1}{T_0 - T_1}$ $\qquad \vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{e}_z$

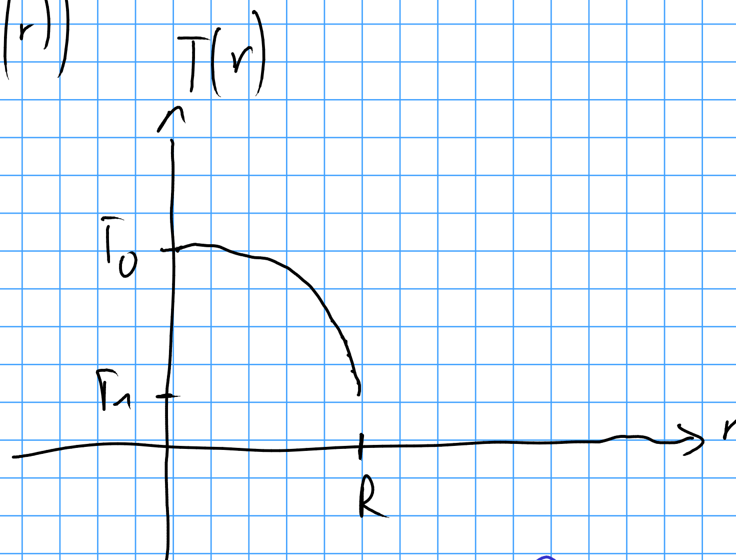
$\vec{j}(r) = j(r)\, \vec{e}_z$

$$T(r) = T_1 + (T_0 - T_1)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

a) ges: Skizze $T(r)$, $\sigma(T(r))$

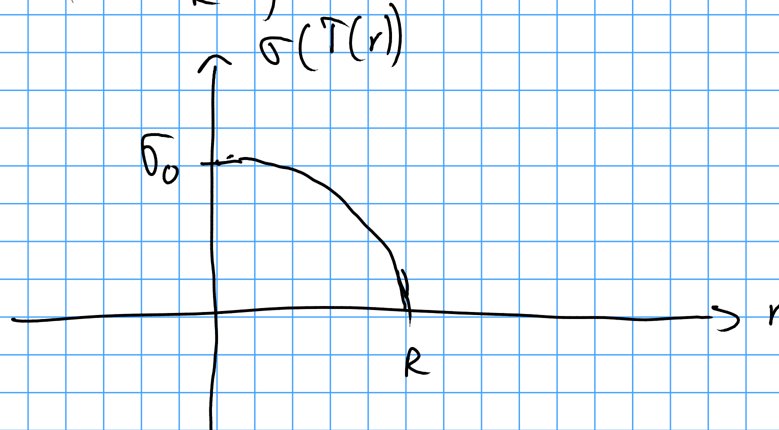
Lös: $T(0) = T_0$

$T(R) = T_1$



$$\sigma(T(r)) = \sigma_0 \frac{\cancel{T_1} + (T_0 - T_1)\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \cancel{T_1}}{T_0 - T_1} =$$

$$= \sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



b) $U = \int \vec{E}\, d\vec{r} = \int_0^L E(r) \cdot \vec{e}_2 \, (-\vec{e}_2)\, dr$

$U = L \cdot E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{U}{L} = \text{const.} \Rightarrow E(r) = E$

$\vec{E} = -\frac{U}{L} \vec{e}_2$

ergibt sich aufgrund des geg. KOSY

c) $\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} = -\sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{U}{L} \vec{e}_2$

d) $I = \iint_A \vec{j}\, d\vec{a} = -\int_0^{2\pi}\int_0^R \sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{U}{L} \vec{e}_2 \overbrace{\boxed{\vec{e}_2\, r\, dr\, d\varphi}}^{d\vec{a}} =$

$= -\sigma_0 \frac{U}{L} \cdot 2\pi \int_0^R r - \frac{r^3}{R^2}\, dr = -\sigma_0 \frac{U}{L} \cdot 2\pi \left[\frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{4} \frac{r^4}{R^2}\right]_0^R =$

$= -\frac{1}{2} \pi \sigma_0 \frac{U}{L} R^2$

e) $p_{el} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{U^2}{L^2}$

f) $P_{dis} = \iiint p_{el}\, dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R \sigma_0 \frac{U^2}{L^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r\, dr\, d\varphi\, dz =$

$= \sigma_0 \frac{U^2}{L^2} \cdot 2\pi \cdot L \int_0^R r - \frac{r^3}{R^2}\, dr = \sigma_0 \frac{U^2}{L} \frac{\pi}{2} R^2$

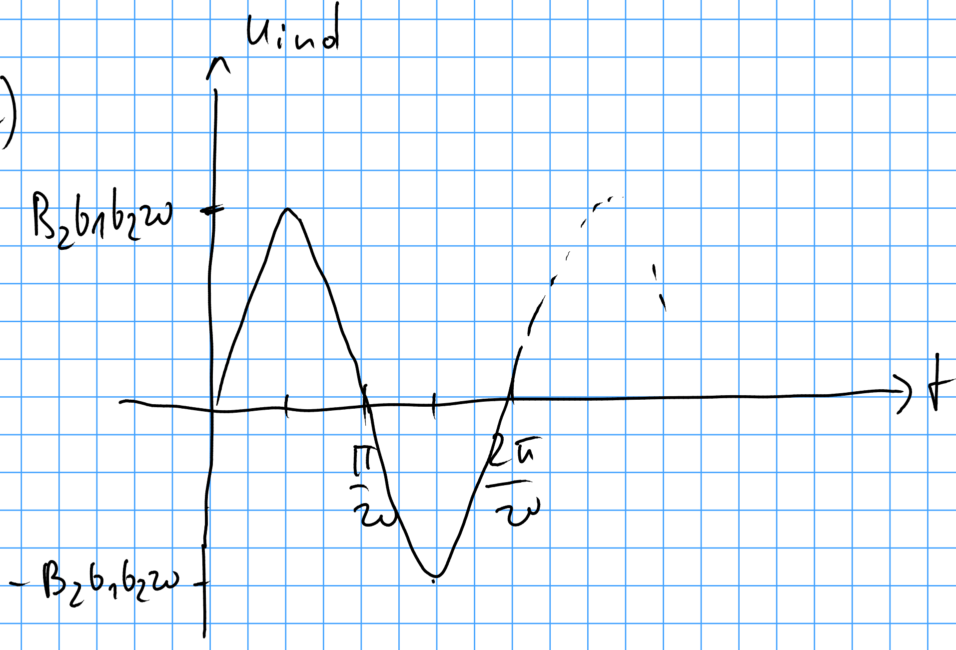
$$P_{el} = UI = U \cdot \left(-\frac{1}{2}\pi \sigma_0 \frac{U}{L}\right) R^2$$

Aufgabe 25

a) $$\Phi = \iint_A \vec{B}\, d\vec{a} = \iint_A B_z \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \, dx\, dy = B_z b_1 b_2 \cos(\omega t)$$

b) $$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = + B_z b_1 b_2 \omega \sin(\omega t)$$

c)



d) $$B_z(t) = B_0 \cos(\omega t - \varphi_0)$$

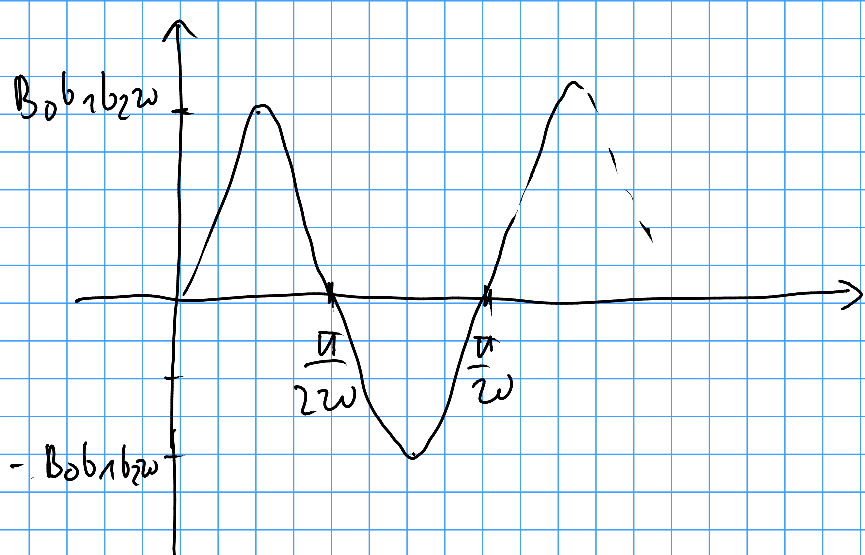
$$\tilde{\Phi}(t) = \iint_A \vec{B}\, d\vec{a} = B_0 b_1 b_2 \cos(\omega t - \varphi_0) \cos(\omega t)$$

$$\tilde{U}_{ind} = -\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} = -B_0 b_1 b_2 \frac{d}{dt}\left(\cos(\omega t - \varphi_0)\cos(\omega t)\right) =$$

$$= B_0 b_1 b_2 \omega \left[\sin(\omega t)\cos(\omega t - \varphi_0) + \cos(\omega t)\sin(\omega t - \varphi_0)\right]$$

e) $\varphi_0 = 0$

$$\tilde{U}_{ind} = 2 B_0 b_1 b_2 \omega \underbrace{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}_{\frac{1}{2}\sin(2\omega t)} = B_0 b_1 b_2 \omega \sin(2\omega t)$$



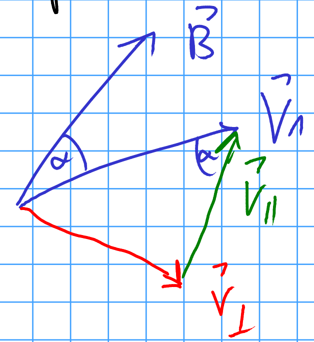
f) Leiterschleife nicht mehr rechteckig, sondern kreisförmig + doppelt so hohe induzierte Spannung

$\Rightarrow 2 b_1 b_2 = r^2 \pi$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{2 b_1 b_2}{\pi}}$

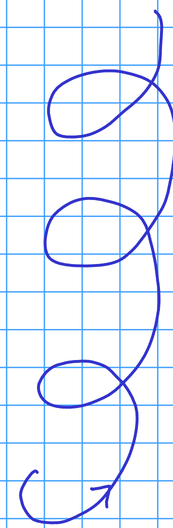
Aufgabe 24

geg: magnetische Flussdichte $\vec{B}$, $\vec{v}_1$, α



$$|\vec{v}_\perp| = |\vec{v}_1| \sin\alpha$$

$$|\vec{v}_\parallel| = |\vec{v}_1| \cos\alpha$$



a) Trajektorie besitzt Form einer Schraubenlinie (vgl. Vorlesung)

b) ges: r, s (Steigung d. Trajektorie)

Kräftegleichgewicht: $\vec{F}_L = \vec{F}_{ZP}$

mit $\vec{F}_L = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) =$

$= q\cdot v\cdot B\sin\alpha$

$$\vec{F}_{ZP} = m\cdot\frac{v_\perp^2}{r} = m\,\frac{v_1^2\sin^2\alpha}{r}$$

Warum $v_\perp$? Dies ist die Komponente von $\vec{v}_1$, die das Elektron auf eine Kreisbahn zwingt.

$$\Rightarrow \quad q\cdot v\cdot B\sin\alpha = m\,\frac{v_1^2\sin^2\alpha}{r}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{m v_1 \sin\alpha}{qB}$$

Berechnung der Steigung: hierfür ist die Komponente $v_\parallel$ essentiell, da diese für die Bewegung nach "oben" verantwortlich ist;

Also: $v_{\parallel} = \frac{s}{T}$ T: Periodendauer: wie lange brauche ich für einen Umlauf

mit $T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m \cancel{v_1} \sin\alpha}{q \cdot B \cdot \underbrace{v_1 \sin\alpha}}$

$\Rightarrow s = v_1 \cos\alpha \, \frac{2\pi m}{qB}$

d) Bedingung für gegenseitiges Treffen der Elektronen:

* → sie müssen sich in gleicher Höhe befinden
→ sie müssen sich auf den gleichen Punkt der Kreisbahn befinden

Ansatz: $x_1(t) = v_{\parallel_1} t + v_{\parallel} t_0$

$x_2(t) = v_{\parallel_2} t$ mit $v_{\parallel_1} = V_1 \cos\alpha = V \cos\alpha$

$v_{\parallel_2} = V_2 \cos\beta = V \cos\beta$

$x_1(t_k) = x_2(t_k)$ (*)

$v_{\parallel_1} t_k + v_{\parallel_1} t_0 = v_{\parallel_2} t_k$

$\Rightarrow t_0 = \frac{v_{\parallel_2} t_k - v_{\parallel_1} t_k}{v_{\parallel_1}} = t_k \left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - 1 \right) = \frac{t_k}{2}$

(*) $\frac{t_K}{2} = nT = \frac{n 2\pi m}{qB} = t_0$

↳ vielfaches der Periodendauer T, da sie nur dann am gleichen Ort sind (unter den geg. Voraussetzungen)