EM-Tutorübung, Blatt 10 - 12.7.2010

Magnetostatik

- wichtiges Ergebnis:

$$dW_{mag} = \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) d\vec{r}$$

$$P_{mag} = \frac{dW_{mag}}{dt} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} = q\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{v} \overset{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ Magnetisches Feld verrichtet keine Arbeit bzw. es wird keine Leistung umgesetzt.

$\rightarrow$ Bewegung eines Teilchen im Magnetfeld

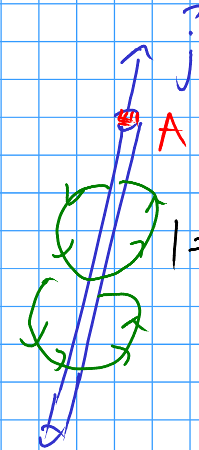
$\rightarrow$ Schraubenlinie

$\rightarrow$ $r = \dfrac{m v_\perp}{q \cdot B}$

$\rightarrow$ $f = \dfrac{qB}{m} = \Omega$

Ampère'sches Durchflutungsgesetz

$$\oint_{\partial A} \vec{B}\, d\vec{r} = \mu_0 I(A) = \mu_0 \iint_A \vec{j}\, d\vec{a}$$



$$I = \iint_A \vec{j}\, d\vec{a}$$

$$\vec{B} \xrightarrow[\text{gew. äquivalent}]{} \vec{H}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

Fragestellung: Stärke von H, wenn Leiter (unendlich lang) von I durchflossen wird

$$\oint_{\partial A} \vec{H}\, d\vec{r} = I(A)$$

$$\int_0^{2\pi} H_\varphi \vec{e}_\varphi \vec{e}_\varphi\, r\, d\varphi = I(A)$$

$$H_\varphi 2\pi r = I(A) \Rightarrow H_\varphi = \frac{I(A)}{2\pi r}$$

$$\vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

Aufgabe 26

a) Ampèresches Durchflutungsgesetz für einen unendlich langen ($\widehat{=}$ Annahme: Länge des Leiters >> Durchmesser)

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \, d\vec{r} = I(A) \quad \Rightarrow \quad H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$$

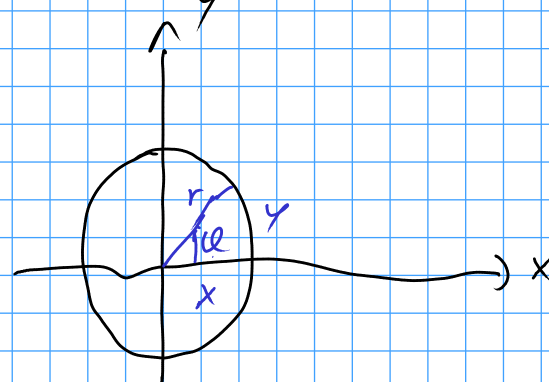
$$\vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\sin\varphi \, \vec{e}_x + \cos\varphi \cdot \vec{e}_y\right) =$$

$$= \frac{I}{2\pi\left(x^2+y^2\right)}\left(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y\right) =$$

$$= \frac{I}{2\pi\left(x^2+y^2\right)}\begin{pmatrix}-y\\ x\\ 0\end{pmatrix}$$



$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

b) $\vec{j} = j_z \vec{e}_z$

$$\int_{\partial A} \vec{H} \, d\vec{r} = \iint_A \vec{j} \, d\vec{a}$$

$$I(r) = \iint_A \vec{j}\, d\vec{a} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} j_z \vec{e}_z \cdot \underbrace{\vec{e}_z\, r' dr' d\varphi}_{FS} =$$

$$= 2\pi j_z \cdot \frac{1}{2} r^2 = \pi j_z r^2$$

$$I(r = r_a) = \pi j_z r_a^2 \quad \Rightarrow j_z = \frac{I}{r_a^2 \pi}$$

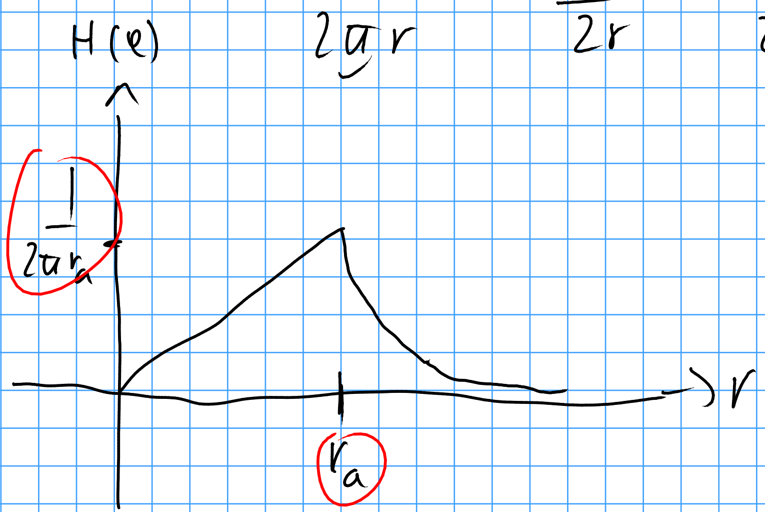
linke Seite der Gleichung: $H_\varphi = \frac{I(A)}{2\pi r}$

1. Fall: $r < r_a$

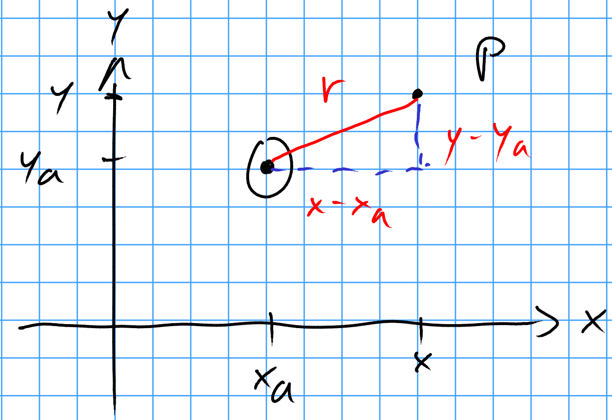
$$H_\varphi = \frac{\pi j_z r^2}{2\pi r} = \frac{j_z r}{2} = \frac{I r}{2\pi r_a^2} \qquad \vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

2. Fall: $r \geq r_a$

$$H_\varphi = \frac{\pi j_z r_a^2}{2\pi r} = \frac{j_z r_a^2}{2r} = \frac{I r_a^2}{2 r \pi r_a^2} = \frac{I}{2\pi r} \qquad \vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$



c)



$$H_\varphi = \frac{1}{2\pi r}$$

$$r^2 = (x-x_a)^2 + (y-y_a)^2$$

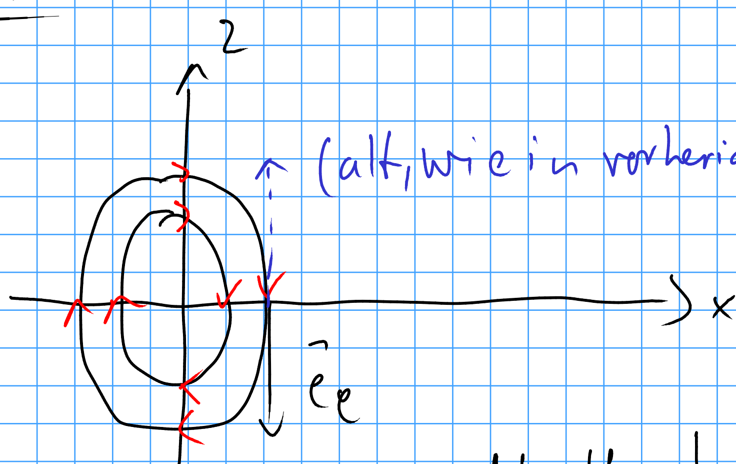
$\Rightarrow$ allgemein:

$$H_\varphi = \frac{1}{2\pi\sqrt{(x-x_a)^2+(y-y_a)^2}}$$

$$\vec{H} = H_\varphi \cdot \begin{pmatrix} -(y-y_a) \\ +(x-x_a) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27

a)



(alt, wie in vorheriger Aufgabe)

$\Rightarrow$ rechte Handregel für einen in e_φ fließenden Strom

b) $H_\varphi = \frac{I_1}{2\pi r} = \frac{I_1}{2\pi\sqrt{x^2+z^2}}$

c)

auf geänderte Vorzeichen hier achten

$$\vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = \frac{I_1}{2\pi\sqrt{x^2+z^2}} \left(\sin\varphi\, \vec{e}_x - \cos\varphi\, \vec{e}_z \right) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x^2+z^2}} \left(\frac{z}{r}\vec{e}_x - \frac{x}{r}\vec{e}_z \right) = \frac{I_1}{2\pi(x^2+z^2)} \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}$$

Einsetzen des Punktes $P(d, 0, -b)$:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{B}(d, 0, -b) = \frac{I_1 \mu_0}{2\pi (x^2 + z^2)} \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}$$

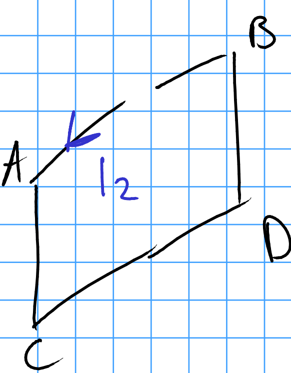
d) ges: $\vec{M}$

Lös: Es gilt allgemein (vgl. Physik Mechanik)

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (*)$$

und ferner $\quad d\vec{F} = I \, d\vec{l} \times \vec{B}; \quad (**)$

Welche Teile der Leiterschleife können überhaupt ein Drehmoment erzeugen?



$\Rightarrow$ Teilstück AB entfällt, da hier der Abstand zur Drehachse 0 wäre und somit nach $(*)$ auch $\vec{M}$

$\Rightarrow$ Teilstücke AC u. BD verursachen Drehmoment jedoch entgegen des Lagers (vgl. rechte Hand-Regel

$\rightarrow$ Stromfluss in $-z$-Richtung

$\rightarrow$ B-Feld in $-x$-Richtung

$\rightarrow$ F in $+y$-Richtung

$\Rightarrow$ effektiv also nur Anteil in CD zu betrachten

Hier gilt dann:

$$\vec{F} = I_2 \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \times \frac{I_1 \mu}{2\pi \sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} -b \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{I_1 I_2 \mu}{2\pi \sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} -ad \\ 0 \\ ab \end{pmatrix}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \times \frac{I_1 I_2 \mu}{2\pi \sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} -ad \\ 0 \\ ab \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{I_1 I_2 \mu}{2\pi \sqrt{x^2+z^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ adb \\ 0 \end{pmatrix}$$