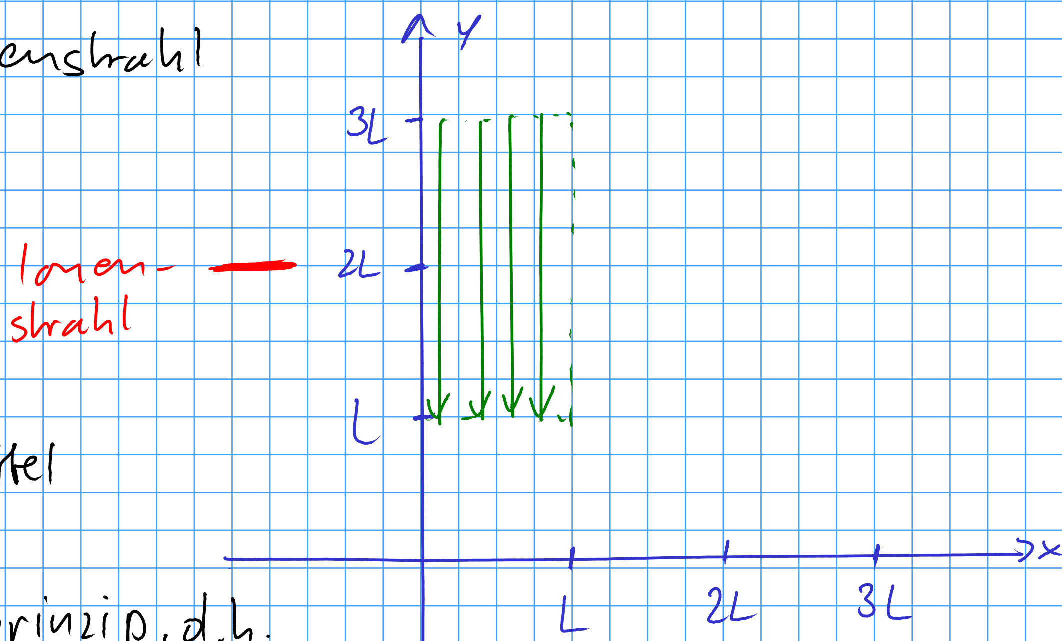
EM-Tutorium, Blatt 4 – 24.10.2010

10. Aufgabe: Ionenstrahl



Wichtigstes Hilfsmittel bei dieser Aufgabe:

→ Superpositionsprinzip, d.h. die translatorischen Bewegungen der verschiedenen Raumrichtungen beeinflussen sich nicht gegenseitig und können daher unabhängig von einander betrachtet werden!

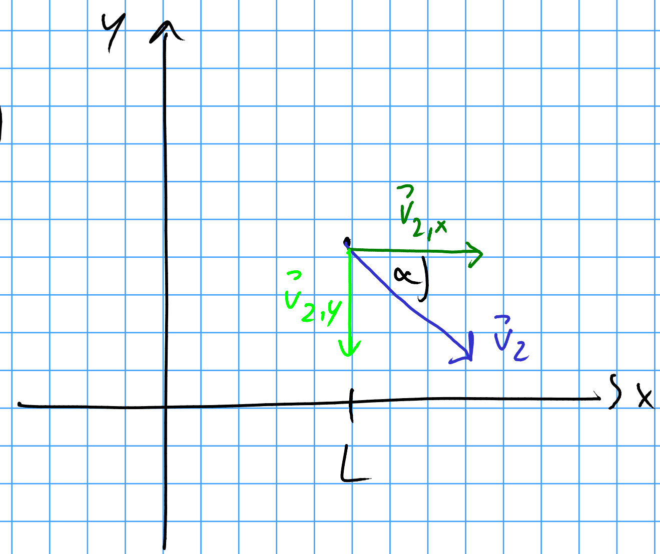
Weitere Vorüberlegung: → Durch das elektrische Feld erfahren die einfach positiv geladenen Ionen eine Beschleunigung, die zudem aufgrund des homogenen $\vec{E}$-Feldes <u>konstant ist</u>, d.h. es gilt:

$$\vec{a} = -a_0 \vec{e}_y \quad \text{mit } a_0 \equiv \text{const.}$$

→ Aufgrund der vorher erläuterten Superpositionsfähigkeit des Systems hat diese keinen Einfluss auf eventuell verhandene Geschwindig-

Kraftanteile in x-Richtung!

a)



$\alpha = 45^\circ$

Es gilt: $\vec{v}_{2,x} = \vec{v}_1 = v_1 \cdot \vec{e}_x$

(Superposition)

$$\cos\alpha = \frac{\|\vec{v}_{2,x}\|}{\|\vec{v}_2\|} \Rightarrow$$

$$\|\vec{v}_2\| = \frac{\|\vec{v}_{2,x}\|}{\cos\alpha} = \frac{v_1}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2}\, v_1}}$$

b) Es gilt: $\vec{E} = \frac{\vec{F}_{el}}{q} = \frac{m \cdot \vec{a}}{q}$ mit $\vec{a} = -a_0 \cdot \vec{e}_y$

Somit:

$\vec{E} = -\frac{m \cdot a_0}{q} \vec{e}_y$; aufgrund der konstanten Beschleunigung vereinfacht sich $a_0 = \dot{v}$ zu $a_0 = \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$

$$= -\frac{m \Delta v_y}{q \cdot \Delta t} \vec{e}_y$$

$\Rightarrow$ zu bestimmen sind also entsprechend Δv_y und Δt

$\Delta v_y = v_{y,2} - v_{y,0} = v_{y,2} = v_1$ (ergibt sich mittels $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{v_{2,x}^2 + v_{2,y}^2}$)

Δt: Zeit, in der effektiv eine Beschleunigung vorhanden war $\hat{=}$ Zeit, die die Ionen benötigt haben, um von

$x = 0$ nach $x = L$ zu „fliegen"

Also: $\Delta t = \frac{L}{v_{1,x}} = \frac{L}{v_1}$

Damit ergibt sich: $\vec{E} = -\frac{m v_1}{q \cdot \frac{L}{v_1}} \vec{e}_y = -\frac{m v_1^2}{q \cdot L} \vec{e}_y$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{m v_1^2}{q \cdot L}$$

c) ges: Punkt P, an dem das elektrische Feld verlassen wird

Lös: Wie in b) berechnet wirkt die Beschleunigung a_0 für $\Delta t = \frac{L}{v_1}$ auf die Ionen, also gilt:

$$\Delta y = \frac{1}{2} a \Delta t^2 = \frac{1}{2} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \Delta t^2 = \underbrace{\frac{1}{2} \Delta v_y}_{\text{Durchschnitt der Geschwindigkeit}} \cdot \Delta t =$$

$$= \frac{1}{2} v_1 \cdot \frac{L}{v_1} = \frac{1}{2} L$$

$$\Rightarrow P = \left(L, \frac{3}{2} L\right)$$

Aufgabe 11

Für den Gradienten in Kugelkoordinaten gilt nach Springer-FS (S. 248f.):

$$\nabla f(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

a) $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r}$

$$\nabla \phi(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{1}{r^2}\vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -1/r^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) $\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\cos\vartheta}{r + r_0}$

$$\nabla \phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi =$$

$$= \frac{-\cos\vartheta}{(r+r_0)^2}\vec{e}_r - \frac{\sin\vartheta}{r(r+r_0)}\vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-\cos\vartheta}{(r+r_0)^2} \\ \frac{-\sin\vartheta}{r(r+r_0)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12: Hüllfläche

a) Es gilt für ein System aus N-Punktladungen:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\|\vec{r}-\vec{r}_i\|^3}(\vec{r}-\vec{r}_i)$$

Für $N=1$ folgt: $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}\vec{e}_r}$ mit $r = \|\vec{r}-\vec{r}_i\|$

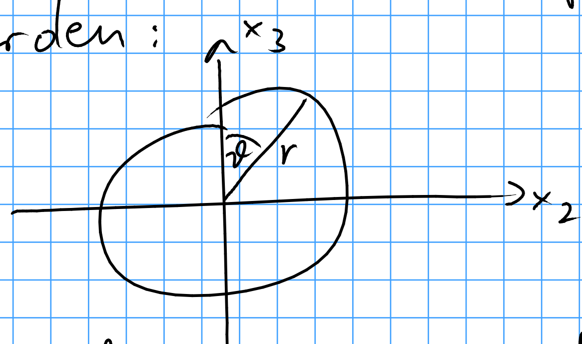
b) Es liegt klar eine Kugelsymmetrie vor (vgl. $\vec{E}$ nur von $\vec{e}_r$ abhängig), sodass zur Berechnung Kugelkoordinaten verwendet werden sollten!

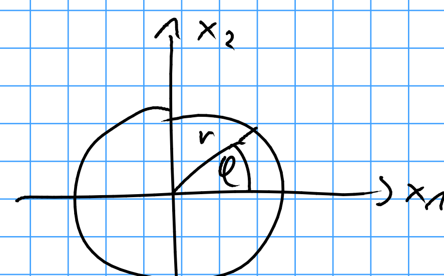
c) ges: $\iint\limits_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{r}$

Erläuterung: Mit Hilfe des ∂-Operators kennzeichnet man den Rand einer Menge, hier also den „Rand" eines Volumens, was gerade eben der Hüllfläche entspricht; analog ist ∂A der Rand einer Fläche, also eine Kurve im Raum

Lös: $\iint\limits_{\partial V} \vec{E}\, d\vec{a} = \iint\limits_{\partial V} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r\, d\vec{a}$

Nun muss ∂V in Kugelkoordinaten parametrisiert werden:





Durch obige Skizzen sieht man schnell, dass gelten muss:

- $r \equiv \text{const.}$
- $\vartheta \in [0; \pi]$
- $\varphi \in [0; 2\pi]$

Zusätzlich muss man sich aus der FS das richtige Oberflächenelement heraussuchen, in unserem Falle der Kugelkoordinaten also:

$$d\vec{a} = \vec{e}_r \, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

kleine Hilfestellung:
(man hat das richtige Oberflächenelement gefunden, wenn das Skalarprodukt der vorkommenden Vektoren 1 ergibt)

Also:

$$\iint_{\partial V} \vec{E} \, d\vec{a} = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q}{r^2} \cdot \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{1} \cdot r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot q \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot q \cdot 4\pi = \underline{\underline{\frac{q}{\varepsilon}}}$$

<u>Ausblick:</u> (wird noch in der Vorlesung behandelt werden...)

Für das Gaußsche Gesetz in seiner differentiellen Form gilt $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$, wobei ρ die Raumladung ist. Die Substitution $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ führt auf

$$\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}) = \rho \qquad \varepsilon = \text{const.}$$

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

was die Äquivalenz der Ansätze zeigt.