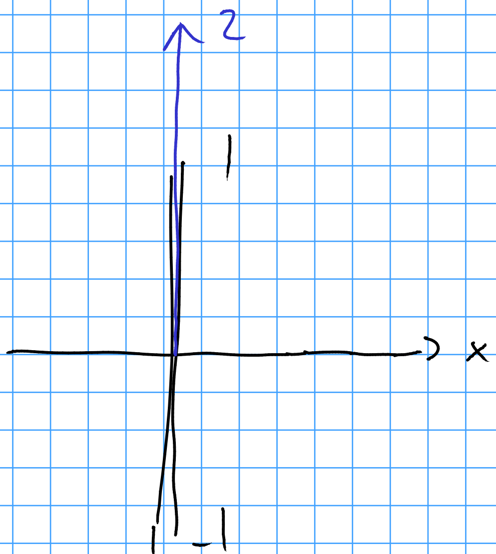
EMF-Tutorübung, Blatt 5, 3.12.2010

Wiederholung: Biot-Savart

Biot-Savart: $\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$



$\vec{H} = \frac{1}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$

- unendlich langer Leiter
- $\vec{H} = H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

$\gamma(t) = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad t \in [-1; 1]$

$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{r} - \vec{r}' = \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \\ z - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - t \end{pmatrix}$

$\|\vec{r} - \vec{r}'\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}$

$d\vec{r}' = \dot{\gamma}(t)\, dt$

$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} dt$

$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-t)^2}^{\,3}}\, dt = \ldots$

Maxima zur Berechnung verwenden

$\lim\limits_{l \to \infty} \vec{H} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi (x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec H = \frac{1}{2\pi r}\vec e_\varphi = \frac{1}{2\pi \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{r}}\Big(-\underbrace{\sin\varphi}_{\frac{y}{r}}\,\vec e_x + \underbrace{\cos\varphi}_{\frac{x}{r}}\cdot\vec e_y\Big)$$

Rand- und Stetigkeitsbedingungen:

$$\vec E_1\cdot\vec t - \vec E_2\cdot\vec t = 0$$

$$(\vec E_1 - \vec E_2)\,\vec t = 0$$

$\vec E_1 = \vec E_2$: triviale Lösungen

Aufgabe 11

Bereich I: $0 \le r \le r_1$; $\vec j = j_0\,\vec e_z$; σ_1, μ_1

Bereich II: $r_1 \le r \le r_2$; $\sigma_2 = 0, \mu_2$

geg: $\vec A_2(\vec r) = -k\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)\vec e_z$

a) ges: $\vec B$

Lös: $\vec B = \text{rot}\,\vec A$

Erinnerung:

$$\text{rot}\,\vec u = \left(\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}} - \cancel{\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}}\right)\cdot\vec e_r + \left(\cancel{\frac{\partial u_r}{\partial z}} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\vec e_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\cancel{(r u_\varphi)} - \cancel{\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}}\right)\vec e_z$$

$$= -\frac{\partial u_z}{\partial r}\,\vec e_\varphi$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(-k \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)\right)\vec{e}_\varphi = \frac{k}{r}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_2} = \frac{k}{\mu_2}\cdot\frac{1}{r}\vec{e}_\varphi$$

b) Ampèresches Durchflutungsgesetz

$$\iint_A \vec{j}\,d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{H}\,d\vec{r} \qquad \vec{H}_2 = \frac{1}{2\pi r}\vec{e}_\varphi = \frac{j_0 r_1^2 \pi}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

$$\iint_A \vec{j}\,d\vec{a} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} j_0 \cdot \vec{e}_z\,\vec{e}_z r\,dr\,d\varphi = j_0 r_1^2 \pi$$

Koeffizientenvergleich: $\frac{k}{\mu_2}\cdot\frac{1}{r} \overset{!}{=} \frac{j_0 r_1^2}{2}\cdot\frac{1}{r}$

$$\Rightarrow k = \mu_2 \frac{j_0 r_1^2}{2}$$

c) ges: $\vec{H}_1, \vec{A}_1$

Lös: $\iint_A \vec{j}\,d\vec{a} = \oint_{\partial A} \vec{H}_1\,d\vec{r}$

$$j_0 r^2 \pi = H_{1,\varphi}\cdot 2\pi r$$

$$\Rightarrow H_{1,\varphi} = \frac{j_0 r^2 \pi}{2\pi r} = \frac{j_0 r}{2}$$

$$\Rightarrow \vec{H}_1 = H_{1,\varphi}\cdot\vec{e}_\varphi$$

Überprüfung: $\vec{H}_1 \cdot \vec{t} - \vec{H}_2 \cdot \vec{t} = \underbrace{i}_{=0}$

$$\vec{t} = \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow H_{1,\varphi}\Big|_{r=r_1} \overset{?}{=} H_{2,\varphi}\Big|_{r=r_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_{1,\varphi}\Big|_{r=r_1} = \dfrac{j_0 r_1}{2} \\ H_{2,\varphi}\Big|_{r=r_1} = \dfrac{j_0 r_1^2}{2 r_1} = \dfrac{j_0 r_1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \checkmark$$

$$\vec{B}_1 = \mu_1 \vec{H}_1 = \mu_1 \cdot \frac{j_0 r}{2} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{B}_1 = \text{rot } \vec{A}_1 \; ; \; \vec{A}_1 = A_{1,z}(r) \cdot \vec{e}_z$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r} A_1(r)\, \vec{e}_\varphi = \mu_1 \cdot \frac{j_0 r}{2} \vec{e}_\varphi$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} A_{1,z} = \mu_1 j_0 \frac{r}{2}$$

$$A_{1,z} = -\int \mu_1 j_0 \frac{r}{2}\, dr + C =$$

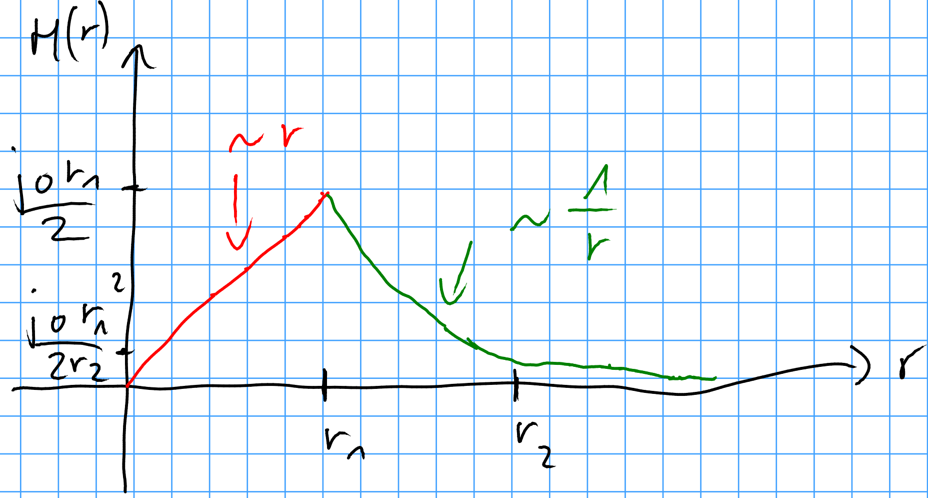
$$= -\frac{1}{4} \mu_1 j_0 r^2 + C$$

$\vec{A}_1(r=r_1) = \vec{A}_2(r=r_1)$ (Stetigkeitsbedingung)

$$\Leftrightarrow \vec{A}_1(r=r_1) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\mu_1 j_0 r_1^2 + C = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{4} \mu_1 j_0 r_1^2$$

d)



e) lokales ohmsches Gesetz

$$\vec{j} = \sigma_1 \cdot \vec{E}_1 \Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\vec{j}}{\sigma_1} = \frac{j_0}{\sigma_1} \cdot \vec{e}_z$$

f) ges: $\vec{S}\,|_{r<r_1}$

Lös: $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{j_0}{\sigma_1}\vec{e}_z \times \frac{j_0 r}{2}\vec{e}_\varphi$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{j_0^2 r}{2\sigma_1}\vec{e}_r$$

g) $$\operatorname{div}\vec{S} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} W_{elmag}}_{=0} = -p_{el}$$

$$\operatorname{div}\vec{S} = \operatorname{div}\left(-\frac{j_0^2 r}{2\sigma_1}\vec{e}_r\right) = -\frac{j_0^2}{2\sigma_1}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot r)$$

$$= -\frac{j_0^2}{2\sigma_1} \cdot \frac{1}{\cancel{r}} \cdot 2\cancel{r} = -\frac{j_0^2}{\sigma_1}$$

$$p_{el} = \vec{j} \cdot \vec{E} = j_0 \cdot \vec{e}_z \cdot \frac{j_0}{\sigma_1} \cdot \vec{e}_z = \frac{j_0^2}{\sigma_1}\vec{e}_z$$