

Fabian Steiner, Paskal Kiefer

*Formelsammlung EM SS 2010*

Diese Formelsammlung dient nur zur Orientierung und stellt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Zudem darf sie während der Prüfung **nicht** benutzt werden, sondern nur eine einfache mathematische Formelsammlung.

**1 Elektrostatik**→ **Eigenschaften der Elektrostatik:**

- elektrisches Feld ist ein Potentialfeld, also  $\vec{E} = -\nabla\Phi$
- $\vec{E}$  ist konservativ, d.h.  $\oint_C \vec{E} = 0$  für alle geschlossen Kurven in der Definitionsmenge,  $\text{rot } \vec{E} = 0$

→ **Coulombsches Gesetz:**

$$\vec{F}_{1 \leftarrow 2} = -\vec{F}_{2 \leftarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

- Kraft auf eine Probeladung am Ort  $\vec{r}$  mit der Ladung  $q$

$$\vec{F}_{ges} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

→ **elektrische Feldstärke:**

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} (\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- allgemeingültiger Zusammenhang

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_q(\vec{r})}{q}$$

→ **Potential einer diskreten Ladungsverteilung:**

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

→ **Elektrische Arbeit:**

$$W_{el} = \int_C \vec{F}_{el}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$W_{el} = U_{12} \cdot q$$

→ Spannung:

$$U_{12} = \int_{C(P_1, P_2)} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r}$$

$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 \text{ (Potentialdifferenz)}$$

→ Integralsatz von Gauß:

$$\oint_{\partial V} \vec{U} d\vec{a} = \int_V \text{div } \vec{U} dV$$

→ Gaußsches Gesetz (integrale Form):

$$Q(V) = \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a}$$

$$Q(V) = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

→ Gaußsches Gesetz (differentielle Form):

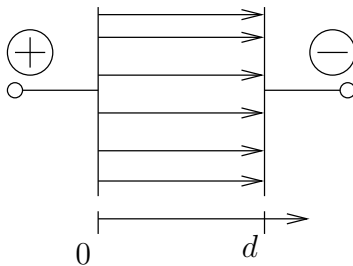
$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

→ Poisson-Gleichung: aus  $\vec{E} = -\nabla\Phi$ , dem Gaußschen Gesetz in differentieller Form und dem linearen Materialgesetz  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$  ergibt sich

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

→ Kapazität (stets Funktion der Kondensatorgeometrie):

– Plattenkondensator (A entspricht der Fläche einer Kondensatorplatte)

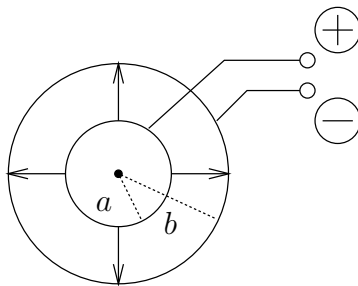


$$U_{12} = \int \vec{E} d\vec{r} = E \cdot d$$

$$Q = \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a} = D \cdot A = \epsilon \cdot E \cdot A$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

– Kugelkondensator

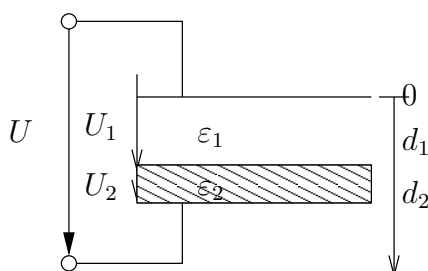


$$Q = \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a} = \int_{\partial V} \epsilon \vec{E} d\vec{a} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \epsilon \vec{E} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi\epsilon E r^2$$

$$U_{12} = \int \vec{E} d\vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{b-a}{ab}$$

→ Kondensatoraggregate:

– Serienschaltung (Q = konstant)



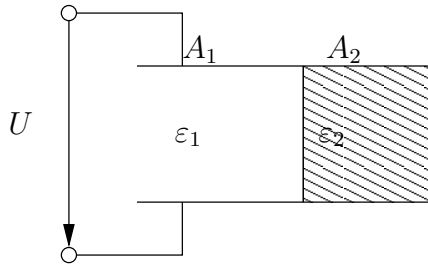
$$|\vec{D}_1| = \sigma_{top} = \frac{Q}{A}$$

$$|\vec{D}_2| = \sigma_{bot} = \frac{Q}{A}$$

$$U = U_1 + U_2 = \int_0^{d_1} \frac{\vec{D}_1}{\epsilon} d\vec{r} + \int_{d_1}^{d_1+d_2} \frac{\vec{D}_2}{\epsilon} d\vec{r} = \frac{Qd_1}{A\epsilon_1} + \frac{Qd_2}{A\epsilon_2}$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{1}{\frac{d_1}{A\epsilon_1} + \frac{d_2}{A\epsilon_2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

– Parallelschaltung ( $U = \text{konstant}$ )



$$U = \int \vec{E} d\vec{r} = E \cdot d$$

$$Q = \int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a} = \varepsilon_1 E A_1 + \varepsilon_2 E A_2$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_1 A_1}{d_1} + \frac{\varepsilon_2 A_2}{d_2} = C_1 + C_2$$

→ Elektrische Feldenergie:

$$W_{el} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

$$W_{el} = \int_V w_{el} dV, \text{ wobei } w_{el} \text{ die Energiedichte bezeichnet}$$

$$w_{el} = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}$$

## 2 Gleichstrom, stationäre Ströme

→ Stromstärke:

$$I(A) = \frac{dQ(A)}{dt}$$

→ Stromdichte:

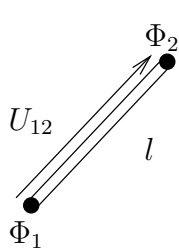
$$|\vec{j}| = \frac{dI_A}{dA}$$

$$I(A) = \int_A \vec{j} d\vec{a} \text{ mit } A = \text{Fläche senkrecht zum Stromfluss}$$

$$\vec{j} = qn\vec{v} = \rho\vec{v}, \text{ mehrere Ladungsträger: } \vec{j} = \sum_{i=1}^N q_i n_i \vec{v}_i \text{ mit } \rho = \text{Ladungsträgerdichte}$$

→ Ohmsches Gesetz:

- homogener Leiterquerschnitt
- homogene Leitfähigkeit  $\sigma$ , spezifischer Widerstand  $\rho = \frac{1}{\sigma}$
- Leiter der Länge  $l$



$$U_{12} = \int_{C(P_1;P_2)} \vec{E} d\vec{r} = E \cdot l$$

$$I = \int_A \vec{j} d\vec{a} = \int_A \sigma \vec{E} d\vec{a} = \sigma \frac{U_{12}}{l} A$$

$$\Rightarrow G = \sigma \frac{A}{l}$$

$$\Rightarrow R = \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{G}$$

→ Ladungserhaltung (integrale Form):

- stationärer Fall

$$\int_{\partial V} \vec{j} d\vec{a} = 0$$

– allgemeiner Fall

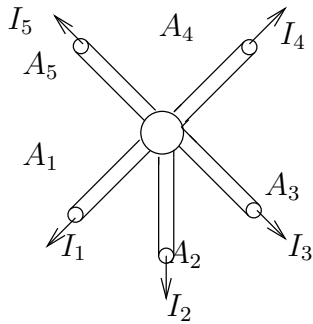
$$\int_{\partial V} \vec{j} d\vec{a} = -\frac{dQ}{dt}$$

→ Ladungserhaltung (differenzielle Form):

$$\frac{dQ(V)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) dV$$

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

→ Herleitung des KCL:



$$I_k = \int_{A_k} \vec{j}$$

$$0 = \int_{\partial V} \vec{j} d\vec{a} = \sum_{k=1}^N \int_{A_k} \vec{j} d\vec{a} = \sum_{k=1}^N I_k$$

→ Elektrische Leistung:

$$P_{el} = \frac{dW_{el}}{dt} = q\vec{E} \frac{d\vec{r}}{dt} = q\vec{E}\vec{v}$$

$$p_{el} = \vec{j} \cdot \vec{E} \text{ Leistungsdichte}$$

$$P_{el} = \int_V p_{el} dV$$

### 3 Magnetostatik

→ Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B}), \text{ mit } [B] = \frac{Vs}{m^2} = 1T$$

→ Superpositionsprinzip (Lorentzkraft u. Coulombkraft)

$$\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

→ Bewegung eines geladenen Punktes im konst. Magnetfeld

$$r = \frac{v_{\perp} m}{qB}$$

$$\Omega = \frac{qB}{m} \text{ Gyrationenfrequenz}$$

→ Drehmoment auf Leiterschleife

$$\vec{M} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B}, \vec{m} = I \cdot \vec{A}$$

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

→ Ampèresches Durchflutungsgesetz

$$\oint_{\partial A} \vec{B} d\vec{r} = \mu I(A), \text{ mit } \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = I(A) = \int_A \vec{j} d\vec{a}$$

→ **Analogien Elektrostatik ↔ Magnetostatik**

Kraft auf  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ruhende} \\ \text{bewegte} \end{array} \right\}$  Probeladung wird gemessen  $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Coulomb-Kraft} \\ \text{Lorentz-Kraft} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \\ \vec{B} \end{array} \right\}$  materialabh. Größen

Wirkung von  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ladungsverteilung} \\ \text{Stromverteilung} \end{array} \right\}$  über  $\left\{ \begin{array}{l} \text{gaußsches Gesetz} \\ \text{Ampère'sches Gesetz} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{D} \\ \vec{H} \end{array} \right\}$  materialabh. Größen

→ **Magnetfeld eines unendlichen langen, Stromdurchflossenen Leiters**

$$\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = I(A) \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} H_r r d\varphi = I$$

$$H_r = \frac{I}{2\pi r}$$

→ **Erweiterung des Ampèreschen Gesetzes**

bisher:  $\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \int_A \vec{j} d\vec{a}$

Maxwellsche Erweiterung:  $\oint_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \int_A \left( \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) d\vec{a}$

→ **Ampère-Maxwellsches Gesetz in differentieller Form**

Integralsatz von Stokes:  $\oint_{\partial A} U d\vec{r} = \int_A \text{rot } U d\vec{a}$

$$\int_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \int_A \text{rot } \vec{H} d\vec{a} = \int_A \left( \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t} \right) d\vec{a} \Rightarrow \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial D}{\partial t}$$

→ **Magnetischer Fluss**

$$\Phi(A) = \int_A \vec{B} d\vec{a}$$

$\Phi(A) = BA$ , unter der Annahme, dass  $B = \text{const.}$ ,  $A = \text{const.}$  gilt

→ **Induktion**

– Bewegungsinduktion

$$\vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B}$$

$$U_{ind} = \int_C \vec{E}_{ind} d\vec{r} = \int_C (\vec{v}(\vec{r}, t) \times \vec{B}) d\vec{r}$$

– Ruheinduktion

$$U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{r}, t) d\vec{a}$$

→ **Maxwellsche Gleichungen**

$$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\text{div } \vec{B} = 0}$$

– lineare Materialgesetze

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B}$$