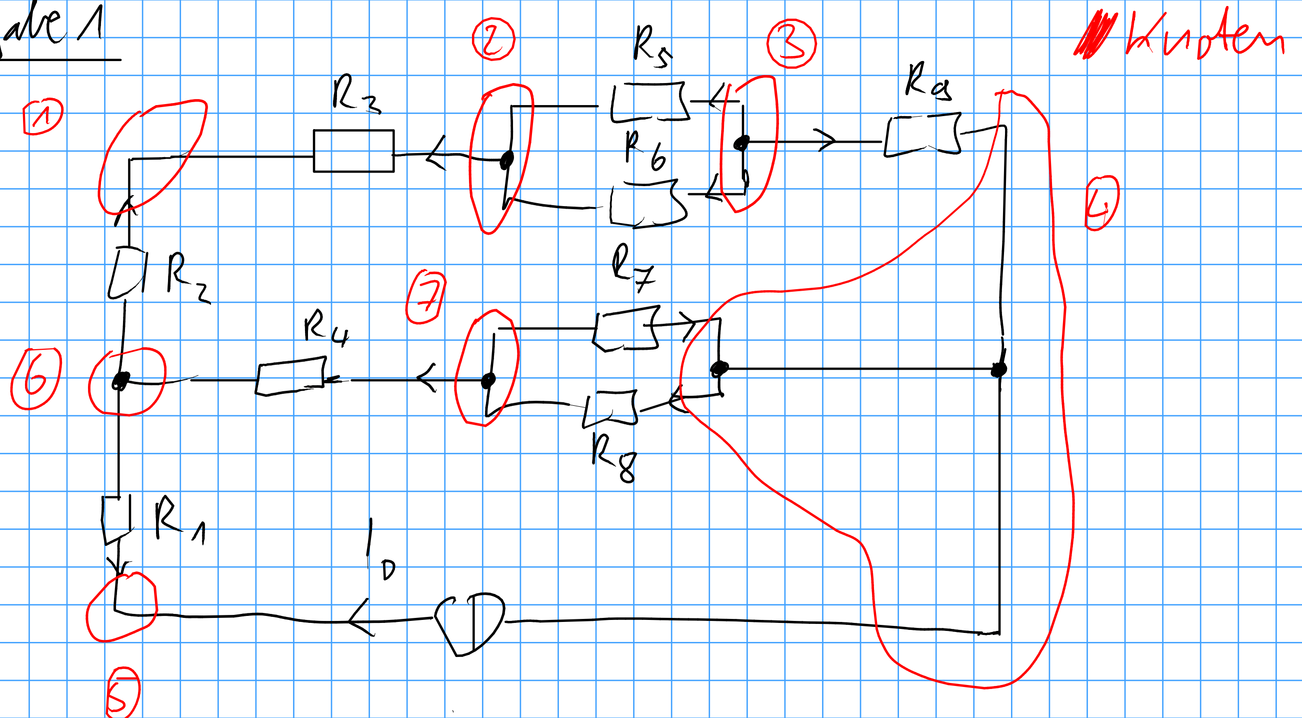
ST-1 Tutorübung – Blatt 1

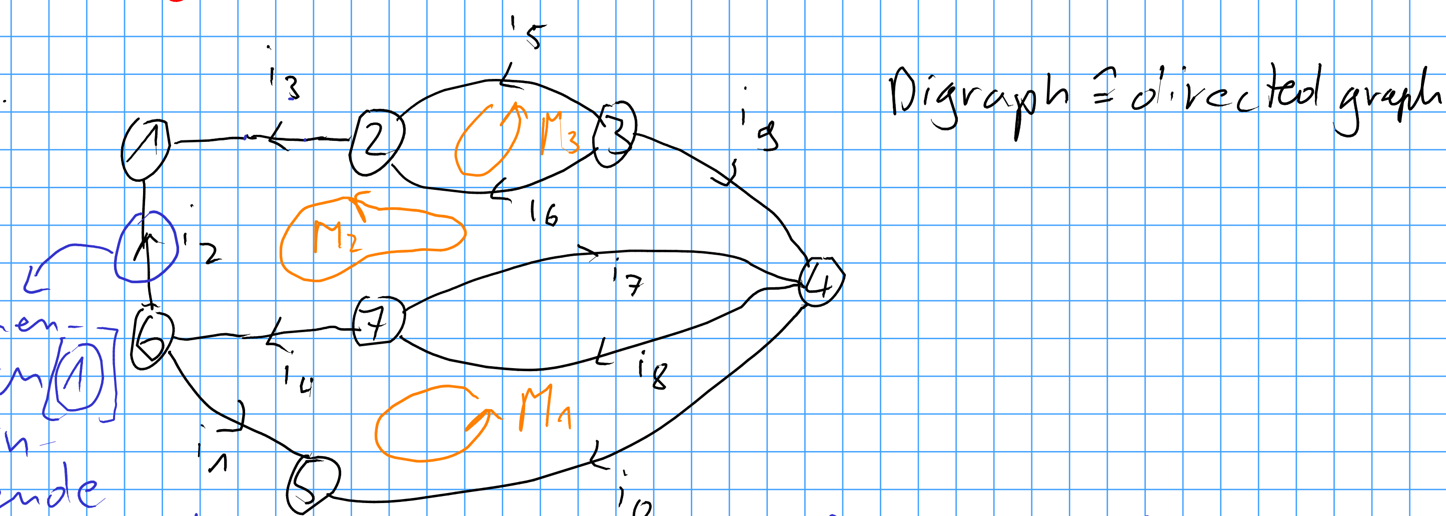
– Fabian Steiner, Bernd Huber

Aufgabe 1

1.



2.



In einen Knoten [1] hineinfließende Ströme werden negativ gezählt, herausfließende [6] positiv

3. KCL-Gleichungen

(1) $-i_2 - i_3 = 0$

(2) $i_3 - i_5 - i_6 = 0$

(3) $i_5 + i_6 + i_9 = 0$

(4) $i_0 - i_7 + i_8 - i_9 = 0$

(5) $-i_0 - i_1 = 0$

(6) $i_1 + i_2 - i_4 = 0$

(7) $i_4 + i_7 - i_8 = 0$

4. Knoteninzidenzmatrix

$$
A' = \begin{array}{c|c}
 & \text{Zweige} \\
\text{Knoten} &
\begin{array}{cccccccccc} ⓪ & ① & ② & ③ & ④ & ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ & ⑨ \end{array} \\
\begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \\ ⑥ \\ ⑦ \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccc}
0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & +1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Spaltensumme stets Null!

5. Maschengleichungen

M1 $u_1 - u_0 + u_8 + u_4 = 0$

M_2 $u_3 - u_2 - u_4 + u_7 - u_9 + u_6 = 0$

M_3 $u_5 - u_6 = 0$

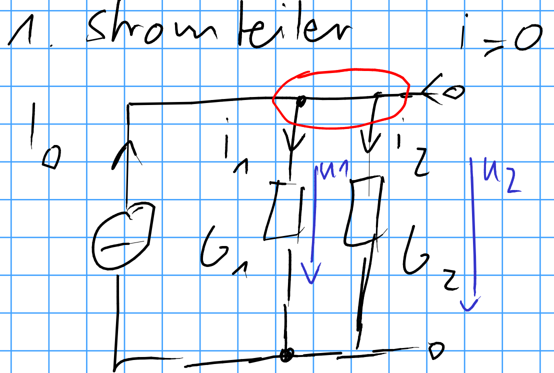
$n = 7$ (Anzahl der Knoten im vorliegenden Netzwerkgraphen)

$b = 10$ (Anzahl der Zweige; Faustregel: gleich der Anzahl von Bauelementen in der Schaltung; VORSICHT jedoch bei Mehrtoren, hier ist im Allgemeinen eine gesonderte Betrachtung notwendig, z.B. OpAmp, Transistoren, etc.)

$\Rightarrow s = b - (n-1) = 10 - 6 = \underline{\underline{4}}$

2. Strom- / Spannungsteiler

1. Stromteiler



KCL: $-I_0 + i_1 + i_2 = 0$

$\Rightarrow I_0 = i_1 + i_2 \quad (I)$

KVL: $u_1 - u_2 = 0$

$\Rightarrow u_1 = u_2 \quad (II)$

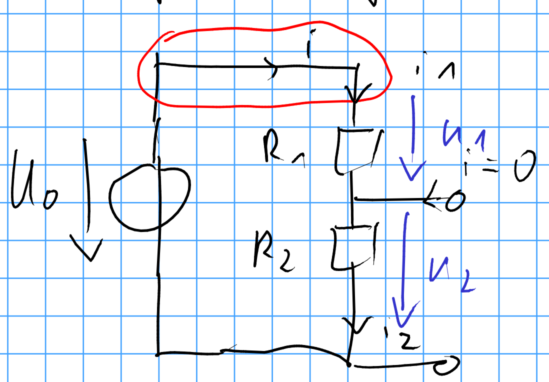
$i_1 = \frac{u_1}{G_1}$; $i_2 = \frac{u_2}{G_2}$; $u_2 = u_1 = i_2 G_2$

$= \frac{i_2 G_2}{G_1}$ in (I)

$\Rightarrow I_0 = i_1 + i_2 = \frac{i_2 G_2}{G_1} + i_2 = i_2 \frac{G_1 + G_2}{G_2}$

$$\boxed{\Rightarrow i_2 = I_0 \cdot \frac{G_2}{G_1 + G_2}}$$

2. Spannungsteiler



KCL:

$i = i_1 = i_2 = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \quad (I)$

aus (I) und der Bauteilgleichung $u_2 = R_2 i_2$ folgt nun:

$$\boxed{U_2 = R_2 i_2 = R_2 \frac{U_0}{R_1 + R_2} = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

3. Matrizenrechnung

1. a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 6 \\ 4+10 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 14 & 30 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60+12 & 6+6 \\ 10+20 & 1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 12 \\ 30 & 11 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 + 21 = 25$

Skalarprodukt zweier Vektoren: $a^T \cdot b = c \; ; \; a \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}$

d) $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 21 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ ACHTUNG!

2. a) $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ $\det A = ad - bc = 6 \cdot 4 - 7 \cdot 2 = 10 \neq 0$

$\Rightarrow$ invertierbar

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$

Probe

$A^{-1}A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow$ Passt!

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ $\det B = 3 \cdot 8 - 4 \cdot 6 = 0$

$\lightning$ nicht invertierbar!

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\det C = 5 - 6 = -1$

$C^{-1} = -1 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\det D = 18 - 16 = 2$ $D^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$

e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\det E = 2 - 4 = -2$ $E^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$