

Aufgabe 3 Poisson-Prozess (12 Punkte)

Der Zufallsprozess \mathfrak{s}_t repräsentiere die Gesamtzahl aller e-Mails, die zum Zeitpunkt t auf einem Mailserver gespeichert werden. Dabei sei \mathfrak{s}_t ein Poisson-Prozess mit Parameter $\lambda > 0$.

 a)* Welchen Wert nimmt der Prozess \mathfrak{s}_t für $t < 0$ an? b)* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt $t \geq 0$ keine e-Mail auf dem Server gespeichert ist. c) Wie lautet der Erwartungswert $E[\mathfrak{s}_t]$ für $t \geq 0$? d) Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung eine obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit an, dass $\{|\mathfrak{s}_t - \lambda t| \geq \varepsilon\}, t \geq 0, \varepsilon \geq 0$.

Hinweis: $\text{Var}[\mathfrak{s}_t] = \lambda t, t \geq 0$.

e) Für welche Werte von ε (abhängig von t) hat diese obere Grenze keine Bedeutung? Begründen Sie Ihre Antwort!



Hinweis: Überlegen Sie, welche Werte eine Wahrscheinlichkeit annehmen kann.

Da der Speicher des Mailserver nicht unbegrenzt ist, nehmen wir nun an, dass jede e-Mail nach einem Zeitraum T wieder gelöscht wird. Die Gesamtzahl aller e-Mails auf dem Server ist dann durch den Zufallsprozess

$$\tilde{s}_t = s_t - x_t$$

gegeben. Dabei bezeichnet s_t unverändert den Poisson-Prozess mit Parameter λ . Der zweite Zufallsprozess x_t beschreibt die Anzahl der e-Mails, die bis zum Zeitpunkt t wieder gelöscht wurden, weil sie zuvor bereits für einen Zeitraum T auf dem Server lagen. Der Zufallsprozess \tilde{s}_t beschreibt also die Anzahl der e-Mails, welche im Zeitintervall $[t - T, t]$ bei dem Mailserver eingetroffen sind.

f)* Geben Sie x_t in Abhängigkeit des Zufallsprozesses s_t an.



g) Wie lautet die Zähldichte der Zufallsvariable ξ_t zum Zeitpunkt t ? Unterscheiden Sie die Bereiche

1) $0 \leq t < T$,

2) $t \geq T$.

Hinweis: Nutzen Sie das Ergebnis aus Teilaufgabe a).

