

Aufgabe 1 (nach Stochastische Signale Klausur WiSe 07/08 Aufgabe 2

Gegeben seien die reellen Zufallsvariablen X und N mit

$$E[X] = 0$$

$$E[N] = \mu_n$$

$$\text{Var}[X] = \sigma_x^2$$

$$\text{Var}[N] = \sigma_n^2$$

Desweiteren seien X und N unkorreliert. Für die Zufallsvariable Y gelte

$$Y = X + N$$

Im Folgenden stelle X eine zu bestimmende Größe dar, welche von einer additiven Störung N überlagert sei. Um eine Rekonstruktion \hat{X} von X zu erhalten, wenn nur die gestörte Größe Y bekannt ist, soll eine affine Funktion der Form

$$\hat{X} = a(Y + b)$$

Entsprechend müssen nun deren Parameter a und b bestimmt werden.

1. Die Rekonstruktion \hat{X} soll denselben Erwartungswert besitzen wie die zu schätzende Zufallsvariable X . Bestimme b derart, dass diese Eigenschaft erfüllt ist.
2. Die Information, welche in Y über X enthalten ist, soll möglichst gut genutzt werden. Darum soll der Rekonstruktionsfehler $R = X - \hat{X}$ unkorreliert zu Y sein. Wie muss a gewählt werden, damit $\text{Cov}[R, Y] = 0$ gilt?
3. Gib die Varianz σ_y^2 von Y in Abhängigkeit von σ_x^2 und σ_n^2 an.
4. Wie lautet die Varianz von \hat{X} ? Ist sie für $\sigma_n^2 > 0$ größer oder kleiner als die Varianz von X ?