Stochastische Signale – Mentorübung – 07/01/2014

Frohes Neues Jahr 2014!

Wiederholung:

- Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion:

(Eingangsgröße ist diskrete Verteilung mit $X : \Omega \Rightarrow \mathbb{N}_0$

nicht negativ

$$G_x(z) = E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_x(k) = p_x(0) + z\, p_x(1) + z^2 p_x(2) + \dots +$$

$$P(\{X = k\}) = p_x(k) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k G_x(z)}{dz^k} \right) \Bigg|_{z=0}$$

$$E[X] = \left[\frac{d}{dz} G_x(z) \right]_{z=1}$$

$$E[X^k] = \left[\frac{d^k}{dz^k} G_x(z) \right]_{z=1}$$

- Charakterische Funktion (stetigen ZV, existiert immer, da absolut integrierbar)

$$\varphi_X(\omega) = E\left[e^{j\omega X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega X} f_X(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ Inverse Fourier Transformierte der Dichte

$$E\left[X^n\right] = \frac{1}{j^n}\left[\frac{d^n}{d\omega^n}\varphi_X(\omega)\right]\Bigg|_{\omega=0}$$

Quiz 7

Aufgabe 1 $\quad Y = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad X_i$ stochastisch unabhängig

$$G_Y(z) = E\left[z^Y\right] =$$

$$= E\left[z^{\sum_{i=1}^{N} X_i}\right] = E\left[z^{X_1}\cdot z^{X_2}\cdot \ldots \cdot z^{X_N}\right] =$$

$$= \prod_{i=1}^{N} E\left[z^{X_i}\right] = \prod_{i=1}^{N} G_{X_i}(z)$$

Unabhängigkeit

$$E[XY] = E[X]\cdot E[Y] \quad \text{falls } X, Y \text{ unabhängig}$$

$\Rightarrow$ kein hinreichendes Kriterium für Unabhängigkeit

Aufgabe 2

Warum ist

$$p_X(k) = \left[\frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} G_X(z)\right]\Bigg|_{z=0}$$

$$E[X] = \left[\frac{d}{dz} G_X(z)\right]\Bigg|_{z=1} \quad ?$$

$$G_X(z) = E\left[z^X\right] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_X(k) =$$

$$= p_X(0) + z\, p_X(1) + z^2 p_X(2) + \dots + z^k \boxed{p_X(k)} + \dots$$

$$\frac{d^k}{dz^k} G_X(z) = k!\, p_X(k) + \underbrace{k!\, z\, P_X(k+1) + \dots + \frac{N!}{(N-k)!} z^{N-k} p_X(N) + \dots}_{=0}$$

$$\Rightarrow p_X(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} G_X(z)\Bigg|_{z=0}$$

$$\frac{d}{dz} G_X(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, \underbrace{z^{k-1}}_{=1} p_X(k)$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_X(k) = \frac{d}{dz} G_X(z)\Bigg|_{z=1}$$

Aufgabe 3

$$\varphi_x(\omega) = E\left[e^{j\omega x}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_x(x)\, dx$$

$$E\left[x^n\right] = \frac{1}{j^n}\left[\frac{d^2}{d\omega^n} \varphi_x(\omega)\right]_{\omega=0}$$

$$\frac{d^n}{d\omega^n} \varphi_x(\omega)\Big|_{\omega=0} = \frac{d^n}{d\omega^n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_x(x)\, dx\Big|_{\omega=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (jx)^n e^{j\omega x} f_x(x)\, dx\Big|_{\omega=0} =$$

$$= j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n \underbrace{e^{j\omega x}}_{\equiv 1} f_x(x)\, dx\Big|_{\omega=0} =$$

$$= j^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_x(x)\, dx = j^n E\left[x^n\right]$$

SS 2012/WDHl

Aufgabe 3 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion (17 Punkte)

Es seien $X_1 \in \mathbb{N}, \ldots, X_Y \in \mathbb{N}$, Y stochastisch unabhängige, identisch verteilte, diskrete Zufallsvariablen. Weiterhin sei $Y \in \mathbb{N}$ selbst eine stochastisch unabhängige, diskrete Zufallsvariable. Alle Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_Y$ sind identisch verteilt nach der Zähldichte $p_X(k) = p_{X_i}(k)$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Gegeben seien die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen $G_X(z) = G_{X_i}(z)$, $\forall i \in \mathbb{N}$ von $X_1, \ldots, X_Y$ und $G_Y(z)$ von Y.
In dieser Aufgabe soll nun die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion der Zufallsvariable

$$S_Y = X_1 + \ldots + X_Y = \sum_{i=1}^{Y} X_i$$

untersucht werden.

X_i u.i.v. stoch. unabh.

$$S_Y | Y=n = \sum_{i=1}^{Y} X_i | Y=n = \sum_{i=1}^{n} X_i | Y=n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a)* Betrachten Sie die bedingte Zufallsvariable $S_n = S_Y|\{Y = n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ deterministisch ist. Wie lautet die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von S_n in Abhängigkeit von $G_X(z)$?

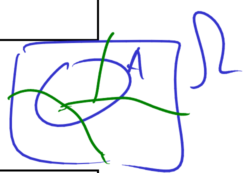
X_i iid

$$G_{S_n}(z) = E\left[z^{S_n}\right] = E\left[z^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = E\left[z^{X_1}\right] \cdot E\left[z^{X_2}\right] \cdots E\left[z^{X_n}\right] = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(z) = G_X(z)^n$$

b)* Geben Sie einen allgemeinen Ansatz zur Berechnung von $G_{S_Y}(z)$ aus der Zähldichte von S_Y an. (Gehen Sie davon aus, dass die Zähldichte $p_{S_Y}(k)$ existiert.)

$$G_{S_Y}(z) = E\left[z^{S_Y}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \, p_{S_Y}(k)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$



c)* Bestimmen Sie $\mathsf{P}(\{S_Y = k\})$ allgemein mit Hilfe des Gesetzes der totalen Wahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von $\mathsf{P}(\{S_n = k\})$.

$$P(\{S_Y = k\}) = p_{S_Y}(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{p_{S_i}(k)}_{p_{S_i}(k) = p_{S_Y|Y=i}(k)} \cdot p_Y(i)$$

d) Berechnen Sie nun $G_{S_Y}(z)$.

Falls Sie sich unsicher sind, wie zu verfahren ist, gehen Sie dabei wie folgt vor:

1) Nutzen Sie Ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe c) um Ihren Berechnungsansatz in Teilaufgabe b) zu erweitern und von S_Y unabhängig zu machen.
2) Nutzen Sie Ihr Ergebnis zu Teilaufgabe a) um $G_X(z)$ in Ihre Berechnungsformel einzubinden und die Formel zu vereinfachen.
3) Nutzen Sie die Definition der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion um Ihre Berechnungsformel um die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von Y zu erweitern und die Aufgabe abzuschließen.

Hinweis: $\sum_i \sum_j f(i,j) = \sum_j \sum_i f(i,j)$ (Kommutativgesetz).

$$G_{S_Y}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_{S_Y}(k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{i=1}^{\infty} P(\{S_i = k\}) \cdot p_Y(i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} z^k P(\{S_i = k\})}_{G_{S_i}(z)} \cdot p_Y(i) =$$

aus a): $G_{S_i}(z) = G_X(z)^i$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} G_X(z)^i \, p_Y(i) =$$

$\tilde{z} = G_X(z)$

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{z}^i p_Y(i) = G_Y(\tilde{z}) = G_Y(G_X(z))$$

e)* Nun seien sämtliche $X_n, n \in \mathbb{N}_0$ und Y identisch Poisson verteilt mit dem Parameter λ. Berechnen Sie den Erwartungswert von S_Y mit Hilfe von $G_{S_Y}(z)$.

Falls Sie die vorherigen Teilaufgaben nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $G_{S_Y}(z) = G_X(G_Y(z))$ weiter.

$$E[S_Y] = \left[\frac{d}{dz} G_{S_Y}(z)\right]\Big|_{z=1}$$

$$p_{X_n}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_Y(k)$$

$$G_X(z) = G_Y(z) = e^{\lambda(z-1)} \Leftarrow \underline{FS}$$

$$G_{S_Y}(z) = G_Y(G_X(z)) =$$

$$= e^{\lambda\left(e^{\lambda z - 1} - 1\right)}$$

$$\frac{d}{dz} G_{S_Y}(z)\Big|_{z=1} = \lambda^2$$